

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

PODZIAŁ, SORTOWANIE SZYBKIE

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

Paweł Rzechonek

1. [**] W n -elementowej tablicy $A[0 \dots n-1]$ zapisany jest nieuporządkowany ciąg $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$. Zaprojektuj rekurencyjny algorytm, który *stabilnie* rozdzieli dane w tej tablicy względem określonej wartości piwota x i nie będzie używał dodatkowych buforów pomocniczych na dane. Czas działania twojego algorytmu powinien być nie gorszy niż $O(n \log n)$.
2. [***] Rozważmy następujący pomysł na trójpodział: z tablicy rozmiaru n losowo wybieramy dwa różne elementy x i y (bez straty ogólności można założyć, że $x \leq y$); następnie przesuwamy pozostałe elementy w taki sposób, aby najpierw występowały $< x$ (pierwszy blok), potem te które są $\geq x$ i $\leq y$ (drugi blok), a na końcu $> y$ (trzeci blok). Napisz w pseudokodzie implementację takiego algorytmu (powinna to być funkcja, która po przestawieniu wszystkich elementów, zwróci parę liczb — pozycje, od których rozpoczyna się drugi i trzeci blok). Wylicz jaka jest oczekiwana długość środkowego bloku przy założeniu, że wszystkie elementy w tablicy są różne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po takim trójpodziale żaden z trzech bloków jest nie większy niż $\frac{n}{2}$, jeśli każda para elementów dzielących mogła być wylosowana z jednakowym prawdopodobieństwem?
3. [**] Jak zmodyfikować algorytm *quick-sort*, aby w każdym przypadku głębokość wywołań rekurencyjnych była nie większa niż $\log n$ dla danych rozmiaru n ?
Wskazówka. Jedno z wywołań rekurencyjnych rozwiń w miejscu.
4. [***] Pokaż, jak zaimplementować algorytm *quick-sort*, aby działał on *w miejscu* (nie wolno korzystać z rekurencji).
5. [**] Załóżmy, że podziały na każdym poziomie rekurencji w algorytmie *quick-sort* są dokonywane w stosunku $\alpha : 1 - \alpha$, gdzie $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ jest pewną stałą. Pokaż, że największa głębokość liścia w drzewie rekursji wynosi około $\frac{\log n}{-\log(1-\alpha)}$.
Uwaga. Nie przejmuj się zaokrąglaniem do liczb całkowitych.
6. [**] Pokaż, że dla każdego stałego $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ prawdopodobieństwo tego, że procedura *partition* dla dowolnej tablicy z różnymi danymi wejściowymi utworzy podział bardziej zrównoważony niż $\alpha : 1 - \alpha$, wynosi około $1 - 2\alpha$. Dla jakiej wartości α prawdopodobieństwo otrzymania zrównoważonego podziału wynosi $\frac{1}{2}$?