

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

KOSZT ZAMORTYZOWANY

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

Paweł Rzechonek

1. [***] *Licznik binarny* to struktura danych reprezentowana przez k -elementową tablicę bitów C . W tablicy tej pamiętana jest nieujemna wartość całkowita zwana licznikiem. Wartość licznika jest reprezentowana w systemie binarnym i zapisana w tablicy C jako ciąg bitów (C_0 to najmniej znaczący bit a C_{k-1} najbardziej znaczący). Na liczniku można wykonywać jedynie operację *increment*, która zwiększa jego wartość o 1. Operacja ta zaprogramowana jest w oparciu o pisemne dodawanie jedynki do liczby binarnej:

```

procedure INCREMENT (bit  $C[0 \dots k-1]$ )
{
    for  $i = 0 \dots k-1$  do
        if  $C_i = 1$ 
            then  $C_i \leftarrow 0$ ;
            else {  $C_i \leftarrow 1$ ; return; }
}

```

Określ faktyczny koszt wykonania pojedynczej operacji *increment*. Przeanalizuj czas wykonania ciągu n takich operacji na początkowo wyzerowanym liczniku. Dokonaj analizy zamortyzowanej na trzy sposoby: (i) metodą kosztu sumarycznego, (ii) metodą księgowania i (iii) metodą potencjału.

2. [*] Uzasadnij, że jeśli dopuścimy operację *decrement* na k -bitowym liczniku binarnym, która zmniejsza jego wartość o 1, to ciąg n operacji *increment* i *decrement* może wymagać czasu $O(nk)$.
3. [**] Jaki jest całkowity koszt wykonania na *stosie* ciągu n operacji *push*, *pop* i *multipop*, gdy początkowo na stosie znajdowało się $s_0 > 0$ elementów a na końcu pozostało ich s_n ? Zastosuj *metodę kosztu sumarycznego* do wyznaczenia zamortyzowanego kosztu pojedynczej instrukcji.
4. [**] Pokaż, jak zaimplementować kolejkę za pomocą dwóch zwykłych stosów, aby zamortyzowany koszt operacji *enqueue* i *dequeue* był rzędu $O(1)$. Zastosuj *metodę księgowania*.
5. [***] *Tablica dynamiczna*, to struktura danych związana z tablicą, której rozmiar można zwiększyć w razie potrzeby. Tablica dynamiczna ma dwie podstawowe własności: pojemność *capacity* (liczba wszystkich slotów w tablicy) i zajętość n (liczba wykorzystywanych slotów na początku tablicy). Współczynnik zajętości α określa proporcję wykorzystywanych komórek w tablicy w stosunku do wszystkich zarezerwowanych, czyli $\alpha = \frac{n}{\text{capacity}}$. Oprócz instrukcji czytania z tablicy *get(i)* i pisania do tablicy *set(i,x)* mamy dodatkową instrukcję *append(x)*, która dokłada nowy element x na koniec tablicy, zwiększając o 1 liczbę zajętych slotów; gdy współczynnik zajętości tablicy jest równy 1, wówczas tablica jest 2-krotnie powiększana (tworzy się nową większą tablicę, przepisuje dane i zwalnia starą).

Rozważmy *tablicę dynamiczną* T z operacją *append*. Zaimplementuj tę operację. Przeanalizuj czas wykonania ciągu n operacji *append* na początkowo pustej tablicy dynamicznej T . Dokonaj analizy zamortyzowanej *metodą potencjału*. Jako funkcję potencjału przyjmij:

$$\phi(T) = 2 \cdot T.n - T.\text{capacity}$$

6. [**] Niech dana będzie funkcja potencjału ϕ taka, że $\phi(D_i) \geq \phi(D_0)$ dla wszystkich $i > 0$, oraz $\phi(D_0) \neq 0$. Wykaż, że istnieje inna funkcja potencjału ϕ' spełniająca warunki $\phi'(D_0) = 0$ i $\phi'(D_i) \geq 0$ dla wszystkich $i > 0$, oraz że koszty zamortyzowane operacji liczone względem ϕ' są takie same jak koszty zamortyzowane liczone względem ϕ .