

# ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

## ZBIORY ROZŁĄCZNE

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

Paweł Rzechonek

---

---

1. [1 pkt.] Zaimplementuj operacje *union* i *find* dla drzewiastej reprezentacji zbiorów rozłącznych ze zbalansowanym łączeniem i kompresją ścieżek. Twoje procedury mają działać w miejscu (bez używania rekurencji).
2. [1 pkt.] Dana jest rodzina  $n$  jednoelementowych zbiorów rozłącznych. Zbiory te będziemy pamiętali w postaci drzewiastej ze zbalansowanym łączeniem. Skonstruuj ciąg  $n - 1$  operacji *union*, by w ich wyniku powstał jeden zbiór reprezentowany przez  $n$  elementowe drzewo o wysokości  $\lfloor \log n \rfloor$ .
3. [2 pkt.] Dany jest graf nieskierowany  $G = (V, E)$  z ważonymi krawędziami. Jak za pomocą operacji na zbiorach rozłącznych wyznaczyć minimalne drzewo rozpinające grafu? Omów algorytm rozwiązujący to zadanie i przeanalizuj jego złożoność. Ile razy nastąpi wywołanie *find()* a ile razy *union()* (odpowiedź uzależnij od wielkości  $|V|$  i  $|E|$ )?
4. [2 pkt.] Zaprojektuj efektywną strukturę danych do wykonywania ciągów podanych operacji na dynamicznie zmieniającym się podziale zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ :
  - *init()* — utworzenie podziału  $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ ;
  - *union(A,B)* — połączenie zbiorów  $A$  i  $B$  bieżącego podziału w jeden zbiór;
  - *find(x)* — wyznaczenie zbioru, do którego należy element  $x$ ;
  - *find-smallest()* — wyznaczenie zbioru bieżącego podziału, który ma najmniej elementów.Pesymistyczna złożoność tych operacji powinna być rzędu  $O(\log n)$ .
5. [3 pkt.] Niech dany będzie ciąg  $m$  instrukcji *union* i *find*, w wyniku którego otrzymujemy jeden zbiór  $n$  elementowy. Wiemy też, że wszystkie instrukcje *union* występują przed instrukcjami *find*. Wykaż, że koszt czasowy wykonania ciągu tych operacji na zbiorach rozłącznych w reprezentacji drzewiastej z łączeniem według rozmiaru i kompresją ścieżek wynosi  $O(m)$ .
6. [3 pkt.] Niech dany będzie ciąg  $m$  instrukcji *union* i *find*, w wyniku którego otrzymujemy jeden zbiór  $n$  elementowy. Wykaż, że koszt czasowy wykonania ciągu tych operacji na zbiorach rozłącznych w reprezentacji listowej z łączeniem według rozmiaru wynosi  $O(m + n \log n)$ .