

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

IHUWr. II rok informatyki.

1. (2pkt) Przeanalizuj następujący algorytm oparty na strategii dziel i zwyciężaj jednoczesnego znajdowania maksimum i minimum w zbiorze $S = \{a_1, \dots, a_n\}$:

```

Procedure MaxMin( $S$ :set)
  if  $|S|=1$  then return  $\{a_1, a_1\}$ 
  else
    if  $|S|=2$  then return  $(\max(a_1, a_2), \min(a_1, a_2))$ 
    else
      podziel  $S$  na dwa równoliczne (z dokładnością do jednego elementu) podzbiory  $S_1, S_2$ 
       $(\max1, \min1) \leftarrow \text{MaxMin}(S_1)$ 
       $(\max2, \min2) \leftarrow \text{MaxMin}(S_2)$ 
      return  $(\max(\max1, \max2), \min(\min1, \min2))$ 

```

UWAGA: Operacja **return** $(\max(a_1, a_2), \min(a_1, a_2))$ wykonuje jedno porównanie.

- Jak pokażemy na jednym z wykładów każdy algorytm dla tego problemu, który na elementach zbioru wykonuje jedynie operacje porównania, musi wykonać co najmniej $\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$ porównania. Dla jakich danych powyższy algorytm wykonuje tyle porównań? Podaj wzorem wszystkie takie wartości.
 - Jak bardzo może różnić się liczba porównań wykonywanych przez algorytm od dolnej granicy?
 - Popraw algorytm, tak by osiągał on tę granicę dla każdej wartości n ?
2. (2pkt) *Nieporządkiem* w ciągu $a_1, \dots, a_n$ nazywamy każdą parę indeksów $\{i, j\}$ taką, że $i < j$ oraz $a_i > a_j$. Ułóż algorytm obliczający liczbę nieporządków w danym ciągu n -elementowym.
3. (1 pkt) Niech u i v będą liczbami o n i m cyfrach (odpowiednio). Załóżmy, że $m \leq n$. Klasyczny algorytm oblicza iloczyn tych liczb w czasie $O(mn)$. Algorytm *multiply* z wykładu potrzebuje $O(n^{\log 3})$ czasu, co jest nie do zaakceptowania gdy m jest znacznie mniejsze od n . Pokaż, że w takim przypadku można pomnożyć liczby u i v w czasie $O(nm^{\log(3/2)})$.
4. (2pkt) Dane jest nieukorzenione drzewo z naturalnymi wagami na krawędziach oraz liczba naturalna C . Ułóż algorytm obliczający, ile jest par wierzchołków odległych od siebie o C .
5. (2pkt) Element tablicy nazywamy *lokalnym minimum*, jeśli sąsiadujące z nim elementy są mniejsze od niego. Ułóż algorytm, który znajduje (jakieś) lokalne minimum w tablicy n różnych elementów.
6. (2pkt) Macierz A rozmiaru $n \times n$ nazywamy macierzą Toeplitza, jeśli jej elementy spełniają równanie $A[i, j] = A[i - 1, j - 1]$ dla $2 \leq i, j \leq n$.
- (a) Podaj reprezentację macierzy Toeplitza, pozwalającą dodawać dwie takie macierze w czasie $O(n)$.
 - (b) Podaj algorytm, oparty na metodzie "dziel i zwyciężaj", mnożenia macierzy Toeplitza przez wektor. Ile operacji arytmetycznych wymaga takie mnożenie?

7. (2pkt) Przeanalizuj sieć permutacyjną omawianą na wykładzie (tzw. sieć Beneša-Waksmana)
 - Pokaż, że ostatnią warstwę przełączników sieci Beneša-Waksmana można zastąpić inną warstwą, która zawiera $n/2 - 1$ przełączników (a więc o jeden mniej niż w sieci oryginalnej) a otrzymana sieć nadal będzie umożliwiać otrzymanie wszystkich permutacji.
 - Uogólnij sieć na dowolne n (niekoniecznie będące potęgą liczby 2).
8. (2pkt) Jakie jest prawdopodobieństwo wygenerowania permutacji identycznościowej przez sieć Beneša-Waksmana, w której przełączniki ustawiane są losowo (jak w zadaniu 6 listy dodatkowej).

ZADANIA DODATKOWE

1. (2pkt) Skonstruuj rodzinę sieci przełączników $\{S_n | n \in N\}$ o głębokości asymptotycznie mniejszej od $\log n$, taką że S_n umożliwia realizację wszystkich przesunięć cyklicznych o potęgę liczby 2 nie większe od n lub udowodnij, że taka rodzina nie istnieje.
2. (2pkt) Rozważ algorytm mnożenia długich liczb, w którym argumenty są dzielone na niekoniecznie stałą liczbę części. Jaką złożoność potrafisz w ten sposób osiągnąć? Pamiętaj, że wraz ze wzrostem liczby części wzrastają wielkości współczynników w kombinacjach liniowych.
3. (2pkt) Ułóż algorytmy znajdowania lokalnego minimum (patrz zadanie 4 z regularnej listy) w:
 - pełnym drzewie binarnym o $n = 2^k - 1$ wierzchołkach;
 - kracie o rozmiarze $n \times n$.

ZADANIA DODATKOWE - NIE BĘDĄ ROZWIĄZYWANE W CZASIE ĆWICZEŃ

1. (0 pkt) Przypomnij sobie algorytm scalający dwie posortowane tablice U i V w czasie liniowym, tj. w czasie liniowo proporcjonalnym do sumy długości tych tablic.
2. (1 pkt) Złożoność podanego na wykładzie algorytmu sortowania przez scalenia wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} T(1) &= a \\ T(n) &\leq T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + bn \quad \text{dla } n > 1 \end{aligned}$$

dla pewnych $a, b > 0$. Udowodnij, że $T(n) \in O(n \log n)$.

3. (1 pkt) Zamiast dzielić tablicę T na dwie połówki, algorytm sortowania przez scalenie mógłby dzielić ją na części o rozmiarach $\lceil n/3 \rceil$, $\lceil (n+1)/3 \rceil$ oraz $\lceil (n+2)/3 \rceil$, sortować niezależnie każdą z tych części, a następnie scalać je. Podaj bardziej formalny opis tego algorytmu i przeanalizuj czas jego działania.
4. (1pkt) Rozważ wersje algorytmu *multiply* dzielące czynniki na trzy i cztery części. Oblicz współczynniki w kombinacjach liniowych określających wartości c_i .
5. (1pkt) Udowodnij, że podana na wykładzie sieć przełączników (sieć Beneša-Waksmana) jest asymptotycznie optymalna pod względem głębokości i liczby przełączników.
6. (1pkt) Załóżmy, że przełączniki ustawiane są losowo (każdy przełącznik z jednakowym prawdopodobieństwem ustawiany jest w jeden z dwóch stanów). Sieć zbudowaną z takich przełączników można traktować jako generator losowych permutacji. Udowodnij, że nie istnieje sieć przełączników, generująca permutacje z rozkładem jednostajnym.

Krzysztof Loryś