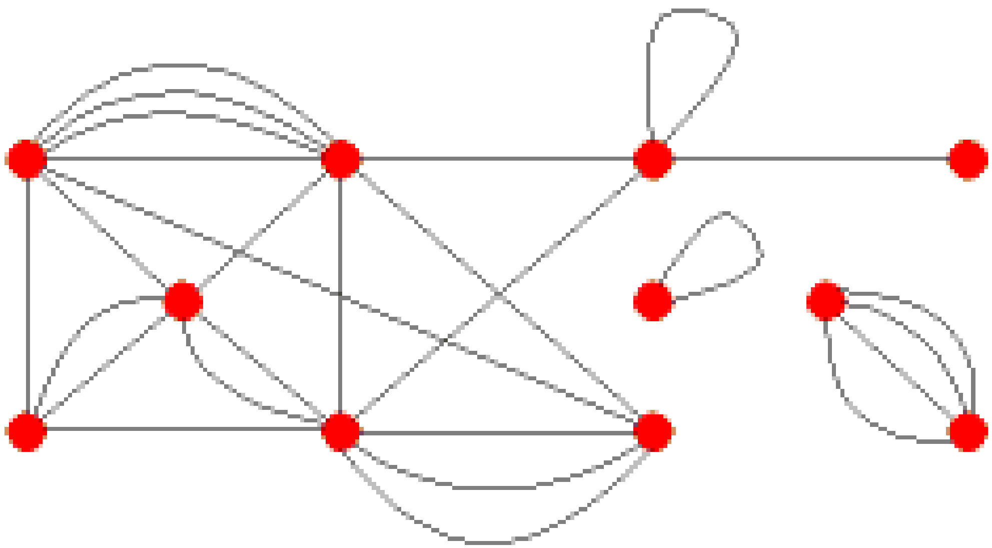
Grafy

Graf

- Graf (ang. graph) to zbiór wierzchołków (ang. vertices), które mogą być połączone krawędziami (ang. edges) w taki sposób, że każda krawędź kończy się i zaczyna w którymś z wierzchołków.
- Graf zapisujemy w postaci uporządkowanej pary $G = (V, E)$, gdzie $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ to zbiór n ponumerowanych wierzchołków a $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ to zbiór m krawędzi.
- Każda krawędź jest parą wierzchołków grafu (u,v) połączonych tą krawędzią, przy czym $u,v \in V$.
- Oznaczenia:
  $|V| = n$
  $|E| = m$

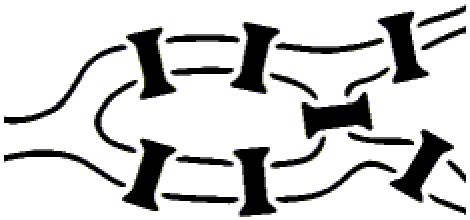
Przykłady grafów

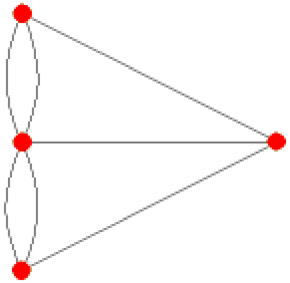
- Graf prosty, to graf bez pętli i bez krawędzi wielokrotnych.



Historia grafów

- Za najstarszy przykład zastosowania grafów w rozwiązaniu zadanego problemu uznaje się zagadnienie mostów królewieckich, opis którego opublikował w 1736 roku Leonhard Euler.





Sąsiedztwo

- Dwa wierzchołki u i v sąsiadują ze sobą (są sąsiednie), gdy istnieje krawędź $\{u,v\} \in E$.
- Dwie krawędzie są incydentne, gdy mają wspólny koniec, czyli $\{u,v\}$ i $\{v,w\}$.
- Krawędź e jest incydentna z wierzchołkiem v, gdy v jest jednym z końców krawędzi e.
- Stopień wierzchołka v to liczba wszystkich incydentnych z nim krawędzi w grafie, co oznaczamy deg(v).

Podgrafy

- Podgraf to fragment grafu pierwotnego.
- Graf $G'=(V',E')$ jest podgrafem grafu $G=(V,E)$, co zapisujemy $G' \subseteq G$, gdy G' powstał z G przez usunięcie części wierzchołków wraz z incydentnymi krawędziami oraz części krawędzi, czyli $V' \subseteq V$ oraz $E' \subseteq E$.

Graf gęsty

- Graf gęsty to graf, w którym jest „stosunkowo dużo” krawędzi, czyli $m \in \Omega(n^{2-\varepsilon})$, dla pewnego $\varepsilon \in [0,1)$.
- Graf gęsty najczęściej zapisujemy w postaci macierzy sąsiedztwa.
- Macierz sąsiedztwa dla grafu prostego jest symetryczna względem głównej przekątnej – można więc zredukować macierz kwadratową do macierzy trójkątnej dolnej.
- Pamięć potrzebna do zaprezentowania grafu w postaci macierzy sąsiedztwa wynosi $\Theta(n^2)$.

Graf rzadki

- Graf rzadki to graf, w którym jest „stosunkowo mało” krawędzi, czyli $m \in O(n^{1+\varepsilon})$, dla pewnego $\varepsilon \in [0,1)$.
- Graf rzadki najczęściej zapisujemy w postaci listy sąsiadów.
- Każdej krawędzi odpowiadają 2 węzły na różnych liściach sąsiadów.
- Pamięć potrzebna do zaprezentowania grafu w postaci listy sąsiadów wynosi $\Theta(n+m)$.

Grafy szczególne

- Graf pusty – $|E|=0$
- Graf pełny – $|E|=(n^2-n)/2$
- Graf liniowy
- Graf cykliczny
- Graf kołowy
- Graf dwudzielny – zbiór wierzchołków możemy podzielić na dwa rozłączne podzbiory w taki sposób, że każda krawędź ma końce należące do różnych podzbiorów, czyli $V=A\cup B$, gdzie $A\cap B=\emptyset$, oraz każda krawędź $e=(u,v)\in E$ jest postaci $u\in A$ i $v\in B$.

Ścieżki i cykle

- Ścieżka w grafie G o długości k, to ciąg k+1 wierzchołków $(v_{i0},v_{i1},v_{i2},\ldots,v_{ik})$ taki, że każde dwa sąsiednie wierzchołki tym ciągu są krawędzią w G, czyli $(v_{ij-1},v_{ij})\in E$ dla j=1…k.
- Ścieżka prosta w grafie G o długości k, to ścieżka, w której żadne dwa wierzchołki nie pojawiają się dwukrotnie.
- Cykl w grafie G to ścieżka, w której pierwszy i ostatni wierzchołek są takie same.
- Cykl prosty grafie G to cykl, w którym żaden wierzchołek, za wyjątkiem pierwszego i ostatniego, nie powtarzają się.

Spójność

- Graf jest spójny, gdy pomiędzy każdą parą wierzchołków istnieje jakaś ścieżka prosta, która je łączy.
- Każdy graf można przedstawić w postaci sumy podgrafów spójnych, które nazywają się spójnymi składowymi grafu.
- Wierzchołek, którego stopień wynosi 0 nazywamy wierzchołkiem izolowanym.
- Spójna składowa do której należy wierzchołek v to podgraf, składający się ze zbioru wszystkich wierzchołków połączonych jakąś ścieżką z wierzchołkiem v oraz podzbiór wszystkich krawędzi incydentnych z tymi wierzchołkami.

Spójność

- Minimalna liczba krawędzi w grafie spójnym wynosi n-1. Taki graf nazywa się drzewem. W drzewie nie ma cykli.
- Liczba krawędzi w grafie złożonym z k składowych spójności wynosi
  $n–k \leq m \leq (n-k)(n-k+1)/2$.
- Graf, który ma n wierzchołków i
  $m > (n-1)(n-2)/2$ krawędzi jest spójny.

Grafy eulerowskie

- **Graf eulerowski** to graf posiadający cykl Eulera.
- **Cykl Eulera** to cykl, który przechodzi przez wszystkie krawędzie dokładnie jeden raz.
- **Twierdzenie:** Każdy graf spójny, w którym stopnie wszystkich wierzchołków są parzyste posiada cykl Eulera.
- **Graf** jest **semi-eulerowski**, gdy istnieje w nim ścieżka, która przechodzi przez wszystkie krawędzie dokładnie jeden raz (grafy eulerowskie są również semi-eulerowskie).

Grafy hamiltonowskie

- **Graf hamiltonowski** to graf posiadający cykl Hamiltona.
- **Cykl Hamiltona** to cykl, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki dokładnie jeden raz.
- **Twierdzenie:** Jeśli w grafie stopień każdego wierzchołka jest $\geq n/2$, gdzie n to liczba wierzchołków w grafie, to w grafie tym istnieje cykl Hamiltona.
- **Graf** jest **semi-hamiltonowski**, gdy istnieje w nim ścieżka, która przechodzi przez wszystkie wierzchołki dokładnie jeden raz.

Przeglądanie grafu wszerz

- Zaznaczamy wszystkie wierzchołki jako nieodwiedzone.
- Wyznaczamy wierzchołek startowy s i wrzucamy go do kolejki planowanych odwiedzin.
- Powtarzamy następująca procedurę: wyciągamy wierzchołek z kolejki, odwiedzamy go, do kolejki odwiedzin wrzucamy wszystkich jego sąsiadów, którzy jeszcze nie byli odwiedzeni i których nie ma w kolejce.

Przeglądanie grafu wszerz

```
Wszerz(graph G, vertex s) {
   stwórz pustą kolejkę Q;
   Q .enqueue(s);
   while ( Q != {} ) do
   {
      x  := Q.dequeue();
      przetwarzamy x;
      zaznacz x jako odwiedzony;
      for u: (x,u) ∈ E do
         if (u nieodwiedzony i nie ma go w kolejce)
                  Q .enqueue(u);
   }
}
```

Przeglądanie grafu w głąb

- Zaznaczamy wszystkie wierzchołki jako nieodwiedzone.
- Wyznaczamy wierzchołek startowy s i wrzucamy go na stos planowanych odwiedzin.
- Powtarzamy następująca procedurę: ściągamy wierzchołek ze stosu, odwiedzamy go, na stos odwiedzin wrzucamy wszystkich jego sąsiadów, którzy jeszcze nie byli odwiedzeni.

Przeglądanie grafu w głąb

```
W_glab(graph G, vertex s) {
   stwórz pusty stos S;
   S.push(s);
   while ( S != {} ) do
   {
      x := S.pop();
      przetwarzamy x;
      zaznacz x jako odwiedzony;
      for u: (x,u) ∈ E do
         if (u nieodwiedzony i nie ma go na stosie)
               S.push(u);
   }
}
```

Przeglądanie rekurencyjne grafu w głąb

```
W_glab(graph G, vertex u) {
    przetwarzamy u;
    for v: (u, v) ∈ E do
        if (v nieodwiedzony) W_glab(G, v);
}
```

Przeglądanie grafu

- Złożoność czasowa: O(n+m) bo odwiedzamy wszystkie wierzchołki i przetwarzając wierzchołek sprawdzamy wszystkich jego sąsiadów.
- Złożoność pamięciowa: O(n).
- Przeglądanie grafu w głąb można zaprogramować rekurencyjnie.

Przeglądanie grafu

- Aby przeglądnąć (wszerz albo w głąb) wszystkie wierzchołki w grafie niespójnym należy iteracyjnie sprawdzać czy wierzchołek był odwiedzony, a jeśli nie to rozpoczynać ponowne przeglądanie od tego właśnie wierzchołka.

```
przeglądaj(graph G){
   oznacz wszystkie wierzchołki jako nieodwiedzone;
   for v ∈ V do
         if (v nieodwiedzony)
               przeglądaj(G, v);
}
```

Grafy skierowane

- **Graf skierowany** (digraf) to graf, w którym krawędzie mają kierunek (jeden wierzchołek jest początkowy a drugi końcowy).
- **Stopień wejściowy wierzchołka** v to liczba krawędzi wchodzących do tego wierzchołka (oznaczany jako indeg(v)); **stopień wyjściowy wierzchołka** to liczba krawędzi wchodzących z tego wierzchołka (oznaczany jako outdeg(v)).
- **Silnie spójna składowa** grafu skierowanego D, to taki maksymalny podgraf H (a jednocześnie jego spójna składowa), że pomiędzy każdą parą wierzchołków w H istnieją ścieżki, które je łączą.

Grafy ważone

- **Graf ważony** to graf albo digraf, w którym krawędziom są przypisane pewne wagi (najczęściej nieujemne): $G(V, E, w)$, gdzie $w: E \to R$.