Kolejki

Kolejka priorytetowa

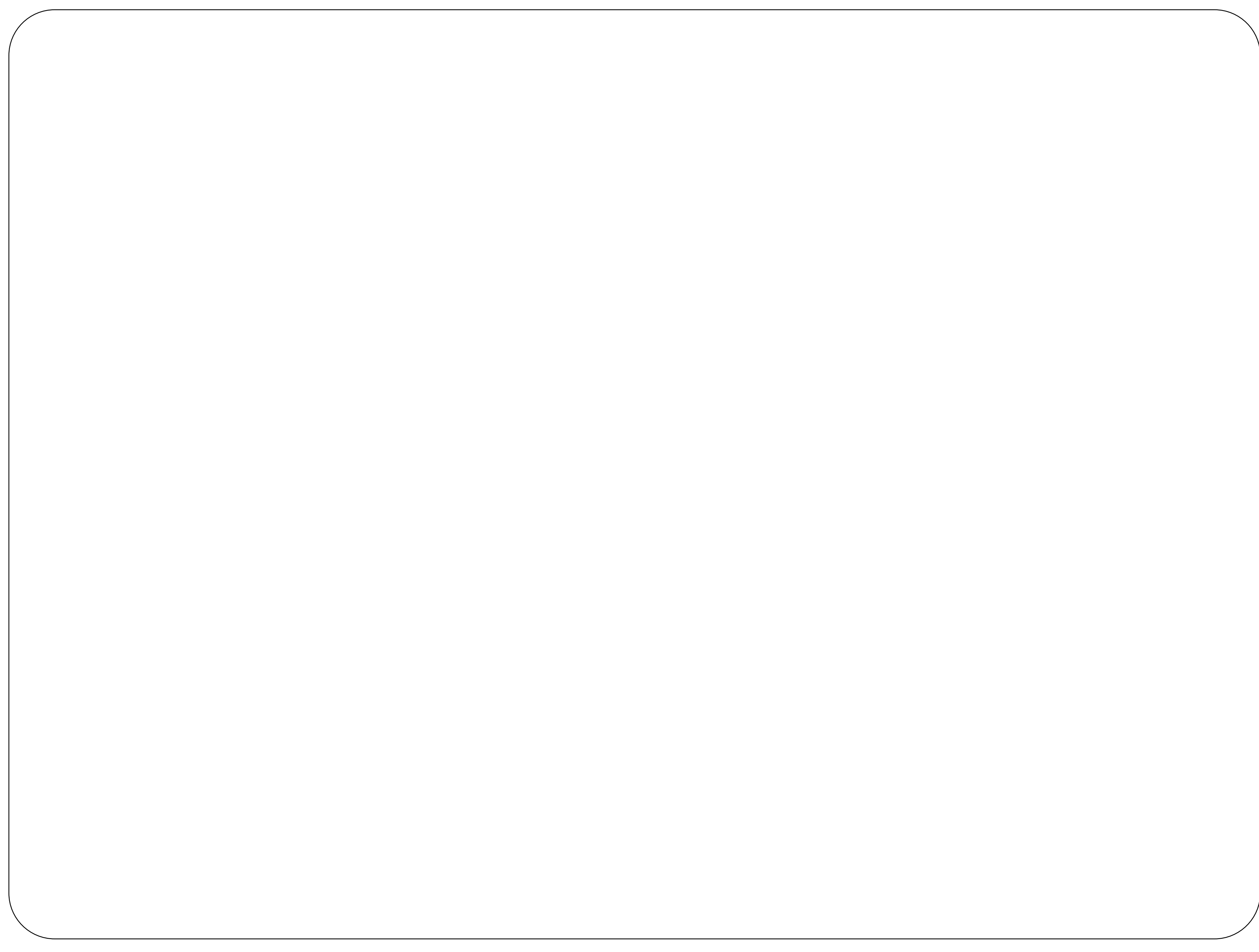
- **Kolejka priorytetowa** (ang. priority queue) to struktura danych pozwalająca efektywnie realizować następujące operacje na zbiorze dynamicznym, którego elementy pochodzą z określonego uniwersum z porządkiem liniowym:
  - insert(x) – dodanie nowego elementu x do zbioru,
  - top() – odczytanie wartości największego elementu w zbiorze,
  - extract-max(x) – usunięcie ze zbioru największego elementu.
  - init() – utworzenie kolejki priorytetowej z zadanego zbioru dnych
- Często rozważa się kolejki priorytetowe, w których poszukuje się elementu minimalnego zamiast maksymalnego.

Implementacja listowa kolejki priorytetowej

- Lista uporządkowana od elementu największego w głowie do najmniejszego w ogonie może być implementacją kolejki priorytetowej.
- Złożoność pamięciowa: O(n)
- Złożoność czasowa operacji kolejkowych:
  - insert(x) – O(n)
  - top() – O(1)
  - extract-max() – O(1)
  - init() – O(n log(n))

Implementacja listowa kolejki priorytetowej

- Lista nieuporządkowana może być implementacją kolejki priorytetowej (ewentualnie z elementem maksymalnym w głowie listy).
- Złożoność pamięciowa: O(n)
- Złożoność czasowa operacji kolejkowych:
  - insert(x) – O(1)
  - top() – O(n) (ewentualnie O(1) gdy na początku znajduje się element maksymalny)
  - extract-max() – O(n)
  - init() – O(n)



Porządek kopcowy w drzewie

- W drzewie jest zachowany **porządek kopcowy**, gdy w każdym węźle synowie przechowują wartości większe (mniejsze) od wartości w węźle.
- Element minimalny (maksymalny) w drzewie z porządkiem kopcowym znajduje się w korzeniu (element minimalny jest w którymś z liści).
- Gdy poruszamy się po drzewie od korzenia do liścia to odwiedzamy coraz to większe (mniejsze) wartości.

Drzewa lewicowe

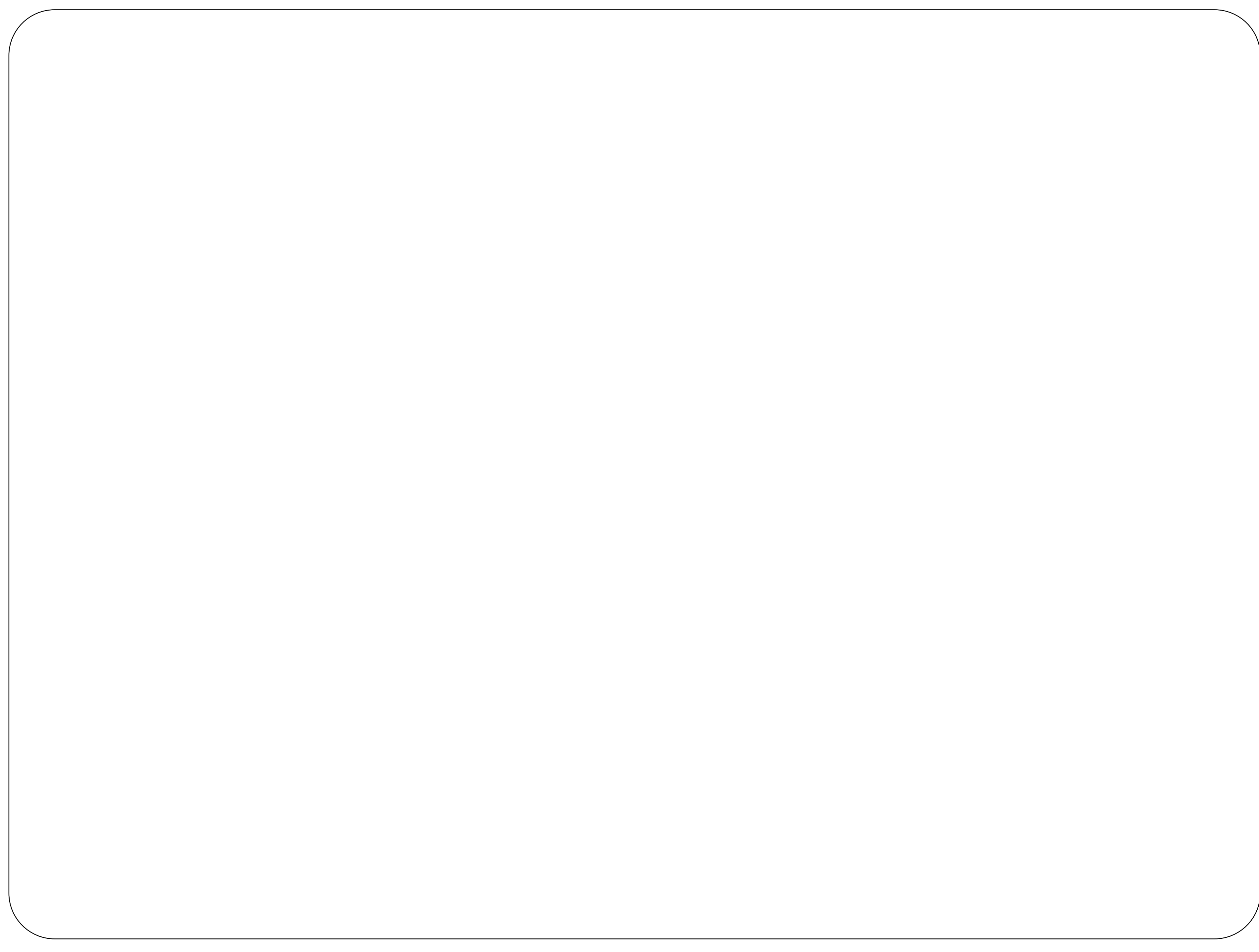
- **Drzewa lewicowe** to drzewa binarne (czyli każdy węzeł może mieć 0, 1 lub 2 potomków) spełniające, oprócz warunku kopca, tzw. warunek lewicowości.
- **Warunek lewicowości** mówi, że dla każdego węzła skrajnie prawa ścieżka zaczynająca się w danym węźle jest najkrótszą ścieżką od tego węzła do liścia.
- Dzięki temu w każdym drzewie lewicowym **prawa wysokość**, czyli długość skrajnej prawej ścieżki od korzenia do liścia, jest co najwyżej logarytmicznej wielkości, w porównaniu z liczbą elementów drzewa.
- Dodatkowo, aby umożliwić efektywne wykonywanie operacji na drzewie, w każdym węźle przechowywana jest prawa wysokość poddrzewa zaczepionego w tym węźle.

Kopce lewicowe

- **Kopiec lewicowy**, to drzewo lewicowe , w którym zachowany jest porządek kopcowy.
- Najważniejszą operacją na kopcach lewicowych jest ich **łączenie** – pozostałe operacje wykonuje się bardzo prosto:
  - wstawianie elementu do istniejącego drzewa polega na utworzeniu jednoelementowego drzewa i połączeniu go z danym drzewem;
  - usuwanie najmniejszego to usunięcie korzenia drzewa i połączenie poddrzew.

Łączenie kopców lewicowych

- Dane są dwa kopce lewicowe A i B.
- Zakładamy, że element szczytowy w kopcu A jest mniejszy od elementu szczytowego w kopcu B.
- Rekurencyjnie łączymy A_r prawe poddrzewo kopca A i kopiec B w kopiec lewicowy C.
- Wybieramy kopiec o mniejszej prawej wysokości spośród A_l lewego poddrzewa kopca A i kopca C i mniejszy z nich podłączamy jako prawe poddrzewo korzenia kopca A a większe jako lewe.
- Czas, pamięć: O(log n)



Kopiec binarny

- Kopiec binarny to binarne drzewo zupełne z porządkiem kopcowym.
- W n-elementowym kopcu binarnym jest $\lceil n/2 \rceil$ liści.
- N-elementowy kopic binarny jest drzewem regularnym gdy n jest nieparzyste albo posiada jeden węzeł tylko z lewym synem (liściem) gdy n jest parzyste.
- Wysokość (krawędziowa) n-elementowego kopca binarnego wynosi $\lfloor \log n \rfloor$.

Tablicowa implementacja kopca

- Drzewo zupełne wstawiamy do tablicy poziomami, zaczynając od komórki nr 1 (komórka nr 0 nie jest wykorzystywana).
- Numer lewego syna dla komórki i-tej wynosi:
  `left(i) = i*2 = i << 1`
  a dla prawego syna:
  `right(i) = i*2+1 = (i << 1) & 1`
- Numer ojca komórki i-tej wynosi:
  `parent(i) =` $\lfloor i/2 \rfloor$ `= i >> 1`

Przesiewanie

- Rozważmy zmianę wartości jednego elementu w kopcu: gdy go zwiększymy element ten trzeba przesiać w górę, gdy go zmniejszymy trzeba go przesiać w dół.
- Przesiewanie to przesuwanie elementu w górę kopca lub dół poprzez zamiany wartości w węzłach tak daleko, aż nie zostanie przywrócony porządek kopcowy.

Przesiewanie

Przesiewanie w górę kopca `heap[1…n]`

```
sieve-up(int i)
{
  if i=1 then return;
  h := parent(i);
  if heap[i] <= heap[h] then return;
  heap[i] :=: heap[h];
  sieve-up(h);
}
```

Czas: O(log n) gdzie n to ilość elementów w kopcu

Pamięć: O(log n) – głębokość rekurencji (w procedurze iteracyjnej O(1))

Przesiewanie

Przesiewanie w dół kopca `heap[1…n]`

```
sieve-down(int i)
{
  if i > n/2 then return;
  m := left(i); // lewy syn;
  if m+1 <= n then
    if heap[m+1] > heap[m] then m++;
  if heap[m] <= heap[i] then return;
  heap[i] :=: heap[m];
  sieve-down(m);
}
```

Czas: O(log n) gdzie n to ilość elementów w kopcu

Pamięć: O(log n) – głębokość rekurencji (w procedurze iteracyjnej O(1))

Implementacja operacji kopcowych

- Wstawienie nowego elementu do kopca `heap[1…n]` dopisujemy element na końcu tablicy i przesiewamy go w górę:

```
insert(comparable x)
{
   n++;
   heap[n] := x;
   sieve-up(n);
}
```

- Wyciągnięcie elementu maksymalnego z kopca `heap[1…n]`:

```
extract-max()
{
   heap[1] := heap[n];
   sieve-down(1);
   return heap[n--];
}
```

Implementacja operacji kopcowych

- Odczytanie elementu maksymalnego z kopca

```
heap[1…n]:
top() -> comparable
{
  return heap[1];
}
```

- Czas: O(log n) dla operacji insert() i extract_max() oraz O(1) dla top(), gdzie n to ilość elementów w kopcu.
- Pamięć: O(log n) dla operacji modyfikujących i O(1) dla top() – głębokość rekurencji (implementując przesiewanie w sposób iteracyjny zapotrzebowanie na pamięć dla wszystkich operacji wyniesie O(1)).

Budowanie kopca

- Dana jest tablica n-elementowa z danymi.
- Naszym zadaniem jest zbudowanie kopca.
- Idea rozwiązania: budowa kopca od dołu
  - wszystkie liście są kopcami;
  - jeśli do korzenia są podłączone dwa kopce, to wystarczy przesiać drzewo w dół od korzenia aby otrzymać kopiec.

```
init-heap()
{
   for i = ⌊n/2⌋ … 1 do
      sieve-down(i);
}
```

- Czas: O(n)

Sortowanie kopcowe

- Idea: budujemy kopic poprzez wkładanie kolejnych elementów do kopca a potem usuwamy kolejno elementu od największego do najmniejszego i umieszczamy je w tablicy wynikowej od końca.
- Czas: $O(n \cdot \log n)$
- Pamięć: $O(1)$ gdy nie używamy rekurencji w przesiewaniach albo $O(\log n)$ w przeciwnym razie
- Sortowanie kopcowe nie jest stabilne.
- Sortowanie kopcowe może działać w miejscu, gdy wyeliminujemy rekurencję z przesiewania.