Normy operatorów splotu na grupie wolnej

Dla grupy dyskretnej G rozważamy funkcje $f : G \to \mathbb{C}$ sumowalne z kwadratem, tzn.

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{x \in G} |f(x)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Funkcje te tworzą przestrzeń Hilberta $\ell^2(G)$ z iloczynem skalarnym

$$(f, g) = \sum_{x \in G} f(x)\overline{g(x)}.$$

Operacja przesunięcia $\lambda(y)$ na $\ell^2(G)$ określona wzorem

$$[\lambda(y)f](x) = f(y^{-1}x)$$

jest izometrią w przestrzeni $\ell^2(G)$. Dla funkcji g na G operator $\lambda(g)$ jest określony wzorem

$$\lambda(g) := \sum_{y \in G} g(y)\lambda(y).$$

Norma operatora $\lambda(g)$ w przestrzeni $\ell^2(G)$ nie przekracza

$$\|g\|_1 = \sum_{y \in G} |g(y)|.$$

Gdy grupa G ma średnią, to dla nieujemnych funkcji g norma operatora $\lambda(g)$ jest równa $\|g\|_1$, zgodnie z twierdzeniem Kestena.

Celem odczytu jest podanie oszacowań na normy pewnych operatorów $\lambda(g)$ w przypadku, gdy G jest grupą wolną, czyli grupą bez średniej. Pojęcie średniej będzie opisane w czasie odczytu.