Problem Procrustesa z macierzami sub-Stiefel

(Sub-Stiefel Procrustes problem)

Krystyna Ziętak

Klasyczny ortogonalny problem Procrustesa polega na wyznaczeniu macierzy ortogonalnej Q, dla której jest osiągnięte minimum (zob. [4], [5])

$$\min\{\|A - BQ\|_F : Q^*Q = I\}, \tag{1}$$

gdzie $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ są dane, $\|\cdot\|_F$ jest normą Frobeniusa. Problem ten odgrywa ważną rolę w statystyce. Szukana macierz ortogonalna Q przekształca macierz prostokątną B w macierz prostokątną A. Macierze A i B reprezentują zbiory danych eksperymentalnych. Celem jest stwierdzenie, czy te zbiory są równoważne z dokładnością do przekształceń ortogonalnych Q (rotations). Rozwiązaniem ortogonalnego problemu Procrustesa jest macierz będąca czynnikiem unitarnym z rozkładu biegunowego macierzy $C = B^*A$ (zob. na przykład [5, str. 198]). To rozwiązanie jest jednoznaczne, jeśli macierz C jest nieosobliwa. Ważnym przypadkiem ortogonalnego problemu Procrustesa jest następujące zadanie (zob. [5, str. 198]):

$$\min\{\|A - BQ\|_F : Q^*Q = I, \det(Q) = 1\},$$

w którym rozpatruje się tylko tzw. "pure rotations".

Zamiast problemu (1) rozważa się problem, w którym macierze $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $B \in \mathbb{C}^{m\times p}$, $p > n$, są prostokątne o różnej liczbie kolumn, a macierz Q jest macierzą prostokątną o ortonormalnych kolumnach, $Q \in \mathbb{C}^{p\times n}, Q^*Q = I$ (zob. [2]). Takie macierze Q nazywamy macierzami Stiefela, a problem (1) z takimi macierzami Q nazywamy niezbalansowanym problemem Procrustesa z macierzami Stiefela (unbalanced Stiefel Procrustes problem). Rozwiązanie tego problemu nie jest określone jakimś wzorem, a iteracyjne metody jego wyznaczania nie mają gwarantowanej zbieżności do rozwiązania w ogólnym przypadku (zob. [6]).

Celem referatu jest prezentacja zawartych w [1] wyników dla problemu Procrustesa, w którym macierze A i B są rzeczywiste i kwadratowe stopnia n, a macierz Q powstaje z macierzy ortogonalnej przez skreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny. Takie macierze nazywamy macierzami sub-Stiefel. Ten wariant problemu Procrustesa pojawił się m.in. w [3] dla $n = 2$. W [1] badamy własności rozwiązania problemu (1) z sub-Stiefel macierzami Q dla dowolnego stopnia n oraz proponujemy iteracyjny algorytm jego wyznaczania. Tak jak w przypadku niezbalansowanego problemu Procrustesa zbieżność do rozwiązania nie jest gwarantowana w ogólnym przypadku.

1. J.R. Cardoso, K. Ziętak, On a sub-Stiefel Procrustes problem arising in computer vision, *Numerical Linear Algebra with Applications* 22 (2015), 523-547.
2. L. Elden, H. Park, A Procrustes problem on the Stiefel manifold, *Numerische Mathematic* 82 (1999), 599-619.
3. R. Ferreira, Reconstruction of isometrically embedded flat surfaces from scaled orthographic image data, PhD Thesis, Lisboa, Portugal 2010.
4. B.F. Green, The orthogonal approximation of an oblique structure in factor analysis, *Psychometrika* 17 (1952), 429-440.
5. N.J. Higham, *Functions of Matrices. Theory and Computation*, SIAM, Philadelphia 2008.
6. Z. Zhang, Y. Qiu, K. Du, Conditions for optimal solutions of unbalanced Procrustes problem on Stiefel manifold, *Journal of Computational Mathematics* 25 (2007), 661-671.